COMPOSITION DE MATHEMATIQUES COMMUNE

Temps accordé : 4 heures

(5 pages)

Le but du problème est d'étudier des propriétés des "équations fonctionnelles" suivantes :

$$(E1)\quad \varphi(x+1)-\varphi(x)=\frac{1}{x} \qquad (E2)\quad \psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}$$

Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on dira que φ est solution de (E_1) sur I si et seulement si φ est définie sur I. et $\forall\, x \in I,\ \varphi$ vérifie (E_1). De même pour ψ avec (E_2). La quatrième partie du problème est indépendante des trois premières.

PREMIERE PARTIE : Etude d'une solution de (E_1).

I- 1 On pose $\varphi(x)=\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$.

a) Quel est l'ensemble de définition I de φ ?

b) Calculer $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\varphi(1)$.

I- 2 a) Montrer que φ est solution de (E_1) sur I.

b) Prouver que $\forall\, x \in I,\ \frac{1}{2x} \le \varphi(x) \le \frac{1}{x}$

En déduire que φ est la seule solution de (E_1) sur I telle que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)=0$.

I- 3 a) Pour tout entier naturel n, calculer $\varphi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ et $\varphi(n+1)$

b) Justifier l'existence des sommes $U=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ et $V=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et en donner les valeurs.

I- 4 a) φ est-elle monotone sur I ?

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$. φ_n est-elle continue sur I ?

Prouver l'inégalité $\forall\, a \in I,\ \forall\, x \ge a,\ |\varphi_n(x)-\varphi(x)| \le \frac{1}{an^a}$ et en déduire que φ est continue sur I

c) Donner un équivalent simple de $\varphi(x)$, quand x tend vers la borne inférieure de I.

d) Dessiner le graphe de φ dans un repère orthonormé.

DEUXIEME PARTIE : Autre expression de φ.

II- 5 **a)** Déterminer l'ensemble K des valeurs du réel x pour lesquelles la série $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ est convergente.

On appellera alors $h(x)$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

II- 6 Montrer que : $\forall x \in I \cap K \quad \varphi(x) = h(x)$.

TROISIEME PARTIE : Application à des calculs de primitives itérées.

Dans cette partie on notera F l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, continues sur $]0, 1[$.

Pour tout élément f de F on posera $T(f) = f_1$, où f_1 est définie sur $[0, 1]$ par $f_1(x) = \int_0^x f(t)dt$.

On définit par récurrence $f_n = T^n(f)$ en posant $T^0(f) = f$ et $T^{n+1}(f) = T(T^n(f))$.

III- 7 **a)** Montrer que T est un endomorphisme de F.
b) Quels sont les éléments f de F tels que $T(f) = f$?

III- 8 Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 1] : T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$.

III- 9 **a)** Pour tout entier naturel k, écrire le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{t^k}{1+t}$, en indiquant son rayon de convergence.

En déduire que $\forall x \in]0, 1[$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^x \frac{t^k}{1+t} dt = (-1)^k \left[\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} \right]$.

b) Jusqu'à la fin de cette question 9 : $f(x) = \ln(1 + x)$.

Déduire de ce qui précède et de la question 8 que, pour tout n entier naturel, il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré inférieur ou égal à n, tels que :

$\forall x \in]0, 1[\; . \; T^n(f)(x) = P_n(x) \ln(1 + x) + Q_n(x)$.

En supposant qu'on connaisse explicitement les polynômes Q_n et P_n, indiquer comment on peut en déduire $T^n(f)(1)$.

c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n(f)(1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varphi(k+1) C_n^k$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

III-10 a) Soit f un élément quelconque de F. Montrer que la série $\sum T^n(f)(x)$ converge normalement sur $[0, 1]$.

b) On prend $f(x) = x^3$. Calculer, pour $x \in [0, 1]$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n(f)(x)$.

QUATRIEME PARTIE Etude d'une solution de (E_2).

IV-11 a) Calculer $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ et $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx$

b) Démontrer : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|e^u - 1 - u\right| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$

IV-12 a) Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ est convergente.
On appellera alors $f(x)$ sa valeur.

b) $f(x)$ peut donc s'écrire : $\lim_{\substack{a>0 \\ a \to 0}} \left(\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \right)$. En utilisant un changement de variable dans l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$, montrer que $f(x) = \ln(x)$.

IV-13 a) Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right) dt$.
On appellera $\Psi(x)$ sa valeur; on pose alors $\theta(x) = \Psi(x) - f(x)$, où f a été définie et calculée à la question 12. Exprimer $\theta(x)$ sous forme de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt$ où g est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. On notera $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |g(x)|$.

b) En déduire une majoration, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, de $|\Psi(x) - f(x)|$, puis $\lim_{x \to +\infty} (\psi(x) - f(x))$.

c) En utilisant la question II-b. montrer que si $0< |h| < x$ on a :

$$\left|\frac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h}+\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,t\,g(t)\,dt\right| \leq \frac{M|h|}{(x-|h|)^3}$$

En déduire que θ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et en préciser la dérivée, puis que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de dérivée : $\psi'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-xt}}{1-e^{-t}}\,dt$.

IV-14 a) Si x est un élément fixé de $\mathbb{R}^{+*}$, on pose pour $n\in\mathbb{N}$:

$$I_n(s)=\int_s^1 te^{-(n+x)t}\,dt \quad \text{si } s\in]0,1] ; \qquad I_n(0)=\int_0^1 te^{-(n+x)t}\,dt.$$

Calculer $I_n(0)$ et montrer que la série de fonctions $s\mapsto\sum I_n(s)$ converge normalement sur $[0,1]$.

On pose $I(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(s)$

b) Exprimer, pour $s\in]0,1]$, $I(s)$ sous forme d'une intégrale, et en déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ \psi'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

IV-15 a) Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ est convergente.
On appellera $S(x)$ sa somme. On définit ainsi, sur $\mathbb{R}^{+*}$, une fonction S.

b) Montrer que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$. Que peut-on dire de la somme $S(x)-\psi(x)-\frac{1}{x}$, pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$?

IV-16 a) Montrer que ψ est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) En utilisant les résultats des questions 12 et 13, en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$\psi(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(x+n)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$$

où γ est une constante qu'on exprimera en fonction de $\psi(1)$.

c) Donner enfin, pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$, une expression de $\psi(x)$ qui utilise $S(x)$ et γ.